POUR FAIRE AIMER LES MATHÉMATIQUES

Prévoir, estimer, partager, explorer... Les mathématiques, plus que des nombres

CHRISTIANE ROUSSEAU
mathématicienne

« Pouvez-vous voir le rôle des mathématiques dans le monde qui vous entoure? Pouvez-vous imaginer une application des mathématiques pour un monde meilleur? »

« J'ai toujours aimé les mathématiques. Pour leur beauté, mais aussi pour leur grande utilité. »

LES MATHÉMATIQUES, C'EST QUOI?

Elles introduisent des objets mathématiques (abstraits) et étudient leurs propriétés et relations. Pensons, par exemple, aux nombres qui nous permettent de mesurer des quantités ou aux figures géométriques qui nous, on peut décrire le visuel. Grâce aux objets mathématiques plus sophistiqués, on peut décrire le monde qui nous entoure, comme le phénomène des saisons ou l'évolution des systèmes météorologiques. Quand se produira le pic d'une épidémie et quelle ampleur aura-t-il? Cela se fait par modélisation mathématique. Modéliser, c'est proposer une description simplifiée d'un phénomène pour mettre en lumière ses caractéristiques essentielles, souvent cachées par trop de détails. Essayez de comprendre le climat en observant les données météorologiques au jour le jour, ou même heure par heure partout sur la planète! Les détails masquent les tendances.

ACTIVITÉS

1 **Scénario catastrophe**
À cause du réchauffement climatique, le niveau de la mer augmente. Que se passerait-il si les calottes glaciaires de la planète fondaient complètement?

2 **Facile d'estimer?**
Combien de nourriture est consommée par jour dans le monde? Et de déchets produits? Explorons la façon dont des problèmes d'estimation liés à la planète peuvent être abordés d'un point de vue mathématique et stratégique.

3 **Partage équitable**
Comment répartir un gâteau ou des corvées entre plusieurs personnes, afin que chacune ait une part équitable ?

4 **Preuves sans mots** (niveau avancé)
Mon travail m'a amenée à beaucoup voyager à l'international. Dans le monde, on compte plus de 7000 langues parlées pour environ 200 langues écrites. Et pourtant, ce qui me fascine, c'est que les mathématicien.ne.s partagent le même langage. Explorons les Preuves sans mots!

Image par gloverbh222 de Pixabay

Science pour tous! CRSNG NSERC Québec

Fonte de la glace et ordres de grandeur

Participants:

À partir de 12 ans.

Aperçu :

Cette activité IDM comprend deux parties indépendantes. Les deux traitent de grandes questions sur ce qui peut arriver à notre planète. Dans la première activité, les questions portent sur le problème de la hausse du niveau de la mer suite au réchauffement climatique. Dans la deuxième activité, la discussion porte, plus généralement, sur la façon dont des problèmes d'estimation liés à la planète peuvent être abordés d'un point de vue mathématique et stratégique.

N'hésitez pas à expérimenter autour des deux activités. Vous pouvez utiliser environ une heure pour chacune des activités, selon le temps que vous désirez consacrer à la discussion. Vous pouvez choisir de faire une seule activité ou les deux, l'une après l'autre, le même jour ou des jours différents.

En guise de préparation générale, il vous suffit de vous familiariser avec le sujet et les ressources ci-dessous et de préparer des données intéressantes à partager avec les élèves à des moments spécifiques.

Activité 1 - Fonte de la glace

Cette activité explore ce qui se passerait si les calottes glaciaires de la planète fondaient complètement. À un moment donné (peut-être au début et / ou probablement à la fin), vous devrez rappeler à vos élèves qu'il s'agit d'un scénario hypothétique, choisi pour pratiquer les mathématiques, la physique et les connaissances de la Terre. La recherche indique qu'au cours du siècle dernier, le niveau moyen de la mer a augmenté d'environ 16-21 cm, et qu'il devrait augmenter d'environ 30 cm de plus au cours de ce siècle. Alors que les données réelles sont préoccupantes et ne peuvent être ignorées, nous considérerons ici des catastrophes plus extrêmes.

1. **Qu'est ce qui vous vient à l'esprit ?**
   Commencez par poser la question suivante: "Que croyez-vous qu'il arriverait à cette ville si le niveau de l'océan montait de 2 mètres?"
   Poussez les élèves à être créatifs dans leurs réponses. Le littoral changerait-il? Y aurait-il des migrations et des réfugiés des villes côtières? Manquerait-on de nourriture? Y aurait-il des effets économiques? Le cours des rivières changerait-il? Quels seraient les effets sur la faune? Le but est de les faire réfléchir, pas de donner des réponses correctes (mais vous pouvez proposer des bribes d'informations en consultant par exemple laréférence [4]).
   Modifiez la valeur dans la question. Et si le niveau augmentait de 5 cm? Et si il augmentait de 10 m?

2. **Et si la glace du pôle Nord fondait**
   Demandez ce qui se passerait si la glace du pôle Nord fondait. Laissez-leur le temps de trouver leurs propres réponses.
   Après un certain temps, rappelez-leur que la calotte glaciaire du pôle Nord est une masse de glace flottant sur l'océan (nous ne considérerons pas le Groenland comme faisant partie de la calotte glaciaire). Proposez l'expérience de réflexion suivante: supposons que vous ayez un verre d'eau rempli jusqu'au bord, afin qu'il ne puisse plus contenir d'eau. Sur l'eau, il y a un glaçon flottant. La majeure partie de la glace est sous l'eau, mais un coin du glaçon dépasse de la surface de l'eau. Supposez alors que vous laissez le verre avec l'eau et la glace à la température ambiante jusqu'à ce que la glace fonde. Que va-t-il se passer? L'eau débordera-t-elle? Le niveau va-t-il diminuer?

Question : Qu'arriverait-il au niveau de la mer si la calotte glaciaire flottant au pôle Nord fondait ?
Réponse : Le niveau de la mer resterait exactement le même. Dans l'exemple du glaçon flottant dans le verre, le niveau resterait exactement le même et le verre ne se renverserait pas. L'explication utilise le principe d'Archimède. Imaginez que vous sélectionnez une certaine région de l'eau dans le verre, une région située juste en dessous et en contact avec la surface. Imaginez maintenant que l'eau à l'intérieur de cette région se transforme en glace. La glace dépasserait vers le haut, occupant une partie de l'air au-dessus. Mais comme le nombre de molécules d'eau est le même, la masse de cette glace est exactement la même que celle de l'eau auparavant, et donc la force de flottabilité ascendante exercée par le reste de l'eau

est la même qu'avant et contrebalance exactement le poids de la glace. La glace flotterait en équilibre.

Par conséquent, le niveau des océans resterait absolument le même si la calotte glaciaire du pôle Nord fondait. Bien sûr, il y aurait de nombreuses autres conséquences importantes pour l'environnement, le climat et la planète dans son ensemble.

3. **Et si la glace du pôle Sud fondait**
   Présentez maintenant le fait qu'au pôle Sud, la calotte glaciaire se trouve au-dessus de la masse continentale de l'Antarctique. Par conséquent, si la calotte glaciaire antarctique fondait, il y aurait beaucoup d'eau ajoutée aux océans. Demandez à vos élèves de calculer l'élévation du niveau de la mer. Certaines données sont nécessaires pour donner cette estimation, vous pouvez laisser vos élèves rechercher ces données en ligne, ou vous pouvez leur donner les chiffres ci-dessous. Si vous décidez de ne donner aucune donnée à vos élèves, ouvrez une discussion sur les données (et les formules) à rechercher. Si quelqu'un trouve un résultat final en ligne, vous pouvez lui demander de justifier ou de reconstruire ce résultat à partir de données de base.

Question : La glace en Antarctique couvre une superficie de 14 millions de km^2 et a en moyenne 2 km d'épaisseur. La Terre peut être considérée comme une sphère d'un rayon de 6371 km et les océans composent 70% de sa surface. L'eau est plus dense que la glace, 1 m^3 de glace est l'équivalent de 0,9 m^3 d'eau. Si toute la glace sur la masse continentale de l'Antarctique fondait, à quel point le niveau de la mer augmenterait-il?

Réponse : environ 70 m
Le volume de glace sur le continent antarctique est

$$24 \text{ M km}^2 \text{ x } 2 \text{ km} = 28 \text{ M km}^3 \text{ de glace.}$$

Si cette glace fondait, elle se transformerait en

$$28 \text{ M km}^3 \text{ glace x } (0.9 \text{ m}^3 \text{ eau} / 1 \text{ m}^3 \text{ glace}) = 25.2 \text{ M km}^3 \text{ eau.}$$

De part, la surface de la Terre est

$$4 \text{ x pi x rayon}^2 = 4 \text{ x } 3.1416 \text{ x } (6371 \text{ km})^2 = 510 \text{ M km}^2.$$

Si seulement 70% de cette surface est composée d'océans, cela nous donne une surface pour les océans de

$$510 \text{ M km}^2 \text{ x } 0.7 = 357 \text{ M km}^2.$$

Maintenant, faisons l'hypothèse que toute la glace fondue serait accumulée exactement sur la surface des océans. Le volume étant égal à la surface multipliée par la hauteur

$$\text{volume} = \text{surface x hauteur}$$

alors l'élévation du niveau de la mer est le quotient du volume d'eau ajouté divisé par la surface des océans :

$$h = 25.2 \text{ M km}^3 / 357 \text{ M km}^2 = 0.0705 \text{ km} = 70 \text{ m.}$$

Ainsi, notre estimation est que si toute la glace de l'Antarctique fondait, le niveau des océans augmenterait d'environ 70 mètres.

Maintenant, pourrions-nous améliorer le modèle? Une option consisterait à tenir compte du fait que toute l'eau ne serait pas empilée au-dessus de l'océan existant, mais qu'une partie inonderait des terres de basse altitude.

Question : Supposons qu'environ 10% des terres seraient inondées et que l'altitude moyenne de cette région inondée soit de 10 m. Ce combien le niveau de l'océan s'élèverait-il dans ce cas? (Ces deux nombres sont seulement une supposition, changez-les pour voir si le résultat change de manière significative.)
Réponse : La surface terrestre représente 30% de la surface de la Terre. $510 \text{ M km}^2 \times 0.3 = 153 \text{ M km}^2$ Maintenant, 10% des terres sont inondées, soit, $153 \text{ M km}^2 \times 0.1 = 15.3 \text{ M km}^2$ Étant donné que cette terre inondée a une altitude moyenne de 10 m, cela signifie que la hauteur moyenne de l'eau au-dessus sera de h - 0,01 km. Ici, la forme du terrain inondé n'a pas d'importance, tant que l'on sait que l'altitude moyenne est de 10m. Maintenant, le volume d'eau neuve est calculé comme suit : $\text{volume} = \text{surface}_{\text{océans}} \times h + \text{surface}_{\text{inondée}} \times (h - 0.01 \text{ km})$ Le volume de nouvelle eau et la superficie des océans sont les mêmes que dans l'exemple précédent. Ce donne une équation pour h dont la solution est $h = 68 \text{ m}$ Ainsi, il y a une très petite différence. Cela n'est pas surprenant : 10% des terres ne représentent que 3% de la surface de la Terre. On peut jouer avec les deux valeurs comme paramètres. Le cas extrême est si la terre entière avait une altitude nulle, et la montée serait encore de 49,4 mètres, donc très élevée.

La référence [2] donne une élévation du niveau de la mer de 73,32 m, utilisant probablement des données plus précises que notre estimation rapide. L'élévation du niveau de la mer monte à 80,32 m si l'on inclut le Groenland et tous les autres glaciers de la Terre.

Comme nous l'avons souligné précédemment, il s'agit d'un scénario catastrophique peu probable à courte échéance. Les prévisions sont une augmentation de 30 cm d'ici la fin du siècle. Un autre facteur qui affecte considérablement le niveau de la mer est l'expansion thermique de l'eau due à une température plus chaude. Cela contribue non seulement à la hausse du niveau de la mer mais accélère également le rythme de fonte des calottes glaciaires.

Références :

Vous pouvez utiliser les ressources suivantes pour enrichir la discussion avec des données du monde réel et des visualisations interactives :

1. Aperçu de la recherche actuelle sur la fonte des calottes glaciaires.
   https://imaginary.org/program/simulating-the-melting-of-ice-caps
2. Données réelles d'experts, présentées pour le contexte de l'éducation.
   https://serc.carleton.edu/eslabs/cryosphere/6b.html
3. Application cartographique pour observer quelles parties du monde seraient couvertes d'eau après une élévation du niveau de la mer
   https://www.floodmap.net/
4. Au total, 10% de la population mondiale vit dans des zones côtières basses, c'est-à-dire à moins de 10 m au-dessus du niveau moyen actuel de la mer..
   McGranahan, G., Balk, D., and Anderson, B.: The rising tide: Assessing the risks of climate change and human settlements in low elevation coastal zones, Environ. Urban., 19, 17–37, https://doi.org/10.1177/0956247807076960 , 2007.

Activité 2 - Ordres de grandeur dans des questions sur la Terre

Comment pouvons-nous trouver des réponses à des questions de grande ampleur lorsque nous avons peu de données? Parfois, les statistiques sur un phénomène particulier ne sont pas disponibles: peut-être parce que la portée est trop grande (par exemple la planète entière) ou trop petite (votre ville, votre école), et aucune institution n'a collecté ces données. Parfois, il est impossible de produire des données parce que nous ne pouvons pas donner un compte exact (combien d'arbres y a-t-il dans le monde?) Ou parce que c'est hypothétique (combien d'arbres seraient nécessaires pour absorber les émissions actuelles de CO2?) Pour ce type de questions , nous ne recherchons qu'une estimation grossière de l'ordre de grandeur de la réponse. Ces estimations sont souvent appelées estimations de Fermi.

Il existe de nombreuses astuces que nous pouvons utiliser pour répondre à ces questions. Dans cette activité, nous explorons cette technique et l'appliquons à certaines questions environnementales liées à la planète Terre.

1. **Questions de réchauffement.**
   Demandez à vos élèves de trouver une réponse aux questions suivantes :
    a. Combien de nourriture est consommée par jour dans le monde ?
    b. Combien de déchets sont produits chaque jour dans le monde ?
    c. Combien de litres d'eau sont nécessaires par jour dans le monde uniquement pour la consommation individuelle (sans compter les industries et l'agriculture) ?

   Pour chaque question, ils doivent obtenir une estimation de leur propre expérience (combien de nourriture je mange chaque jour, combien de déchets je produis…), et vous pouvez leur fournir des statistiques telles que la population mondiale (7 milliards de personnes) . Posez-leur des questions telles que la variabilité de ces chiffres. Est-ce la même consommation de nourriture par personne dans le monde? Et les ordures? Qu'en est-il des déchets produits par l'industrie, est-ce plus ou moins que ceux des particuliers? Vous pouvez trouver des réponses «officielles» à ces questions en cherchant sur Internet. Ayez une période de discussion après avoir donné les réponses.

2. **Questions d'information incomplètes.**
   Posez à vos élèves ce nouveau type de questions où ils devront obtenir des données de sources indirectes et faire des modèles et des estimations simples :
    a. Combien de litres d'eau l'école (ou le bâtiment dans lequel vous êtes actuellement) utilise-t-elle chaque semaine ?
    b. Combien de brins d'herbe y a-t-il sur un terrain de football (ou tout autre terrain de sport ou jardin) ?
    c. Quelle quantité de CO2 est expirée par tous les étudiants/participants par jour?

3. **Questions plus profondes.**
   Amenez la question suivante :
   a. Selon vous, quel est le volume de toutes les bouteilles en plastique qui se retrouvent dans l'océan tous les jours?

   Laissez vos élèves deviner (en les aidant) les étapes à suivre pour décomposer le problème et faire des estimations. Quelques questions qui peuvent se poser :
   - Quel est le bon ordre de grandeur ? Des Kg ? Des tonnes ? Des millions de tonnes ? Des milliards de tonnes ?
   - Quelle quantité de plastique est produite par l'humanité ?
   - Quelle quantité aboutit dans l'océan ?
   - Vous pouvez supposer (le pouvez-vous ?) que le plastique mal géré, non recyclé, ne provient que de la consommation personnelle, pas de l'industrie, vous pouvez donc essayer d'estimer la quantité de plastique qu'une personne consomme et multiplier par un certain nombre d'habitants.
   - Combien de personnes vivent dans les zones côtières ? Vous pouvez supposer que seuls les pays côtiers polluent les océans (le pouvez-vous ?).

   Pour chaque étape de la décomposition, vous pouvez essayer de faire une supposition ou essayer de trouver des informations en ligne.

   Gardez le débat ouvert. Le but est de faire discuter les élèves des grandeurs et de leurs relations. Après un certain temps, demandez-leur de parvenir à un consensus.

   Enfin, utilisez l'article de référence [4] pour donner une réponse d'expert: entre 4,8 et 12,7 millions de tonnes de débris plastiques ont été jetés dans l'océan en 2010, et on peut s’attendre à augmenter d’un ordre de grandeur (multiplier par 10) d'ici 2025 si aucune mesure n'est prise.

   Ouvrez un dernier tour de discussion sur les implications de la pollution des océans.

4. **Projet bonus**
   Proposez à vos élèves en tant que projet bonus une dernière estimation de Fermi pour laquelle ils peuvent enquêter par eux-mêmes (par exemple à la maison, avec des amis ou en famille), et qui ne peut pas être trouvée sur Internet. Par exemple, utilisez des sujets locaux, tels que: Quel est le bilan CO_2 de cette ville? Autrement dit, combien plus de CO_2 est émis dans l'atmosphère que ce qui est absorbé par les arbres?

Ressources

1. Dessin animé expliquant comment faire une estimation de Fermi en pratique :
   https://what-if.xkcd.com/84/

2. Article qui donne quelques conseils pour faire de bonnes estimations de Fermi :
   https://www.lesswrong.com/posts/PsEppdvgRisz5xAHG/fermi-estimates
   Vous pouvez vous entraîner à résoudre ces questions et d'autres, et aider vos élèves avec quelques conseils.
   Par exemple, l'article explique comment faire une estimation d'une amplitude à partir de deux bornes en utilisant la moyenne géométrique ou la moyenne géométrique approximative (AGM). Cela ajoutera du contenu mathématique supplémentaire à l'activité.

3. Exemples de questions de Fermi à utiliser à l'école (en général non liées aux sciences de la Terre) :
   https://www.teachertoolkit.co.uk/2017/04/28/fermi-questions/

4. Article de recherche qui étudie la quantité de plastique dans l'océan :
   Jambeck, J. R., Geyer, R., Wilcox, C., Siegler, T. R., Perryman, M., Andrady, A., Narayan, R., Law, K. L. (2015). *Plastic waste inputs from land into the ocean. Science, 347(6223), 768–771.* doi:10.1126/science.1260352

Créez et partagez !
Partagez vos questions, vos réflexions, vos discussions et vos résultats à l'aide des hashtags **#idm314earth** et **#idm314**.

Ressources supplémentaires :

1. Ressources pédagogiques sur les sciences du climat (project TROP-ICSU): https://climatescienceteaching.org
2. Simulateur du climat interactif : https://en-roads.climateinteractive.org/scenario.html
3. Blogue sur *Mathématiques de la planète Terre*: http://mpe.dimacs.rutgers.edu/blog/ (en)
4. Plus de problèmes de Fermi pour l'école : https://www.teachertoolkit.co.uk/2017/04/28/fermi-questions/
5. Ressources sur la façon de mener des discussions basées sur des questions à l'école
   a. The right question at the right time
   b. Inquiry based maths education (from the EU project FIBONACCI)

Partage équitable

Participants :

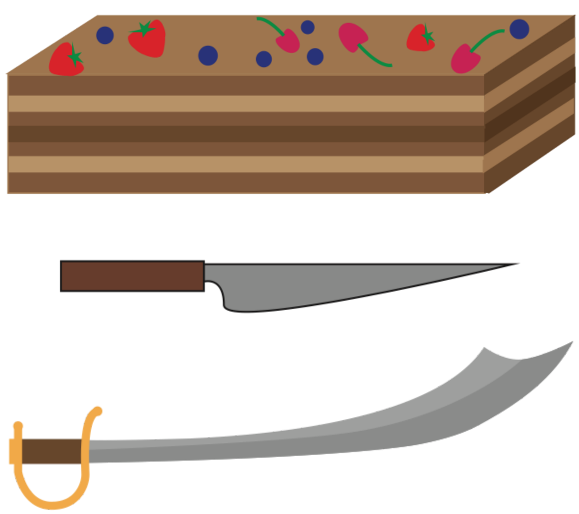
Age: 12 ans et plus. Groupes de 4-5 personnes.

Problématique :

Nous explorons différentes méthodes mathématiques pour répartir un gâteau entre plusieurs personnes, afin que chacune ait une part équitable. Dans la dernière activité, nous partageons des corvées au lieu de partager un gâteau. Bien que chacun souhaite avoir le moins de corvées possible (au lieu de la plus grande part du gâteau), nous pouvons les répartir équitablement avec une méthode similaire.

Préparatifs

Préparez des couteaux en carton, un sabre en carton et des gâteaux en carton pour chaque groupe ou, mieux encore, demandez aux groupes de les fabriquer. Les gâteaux ne doivent pas être homogènes ; les participants peuvent donc en préférer une partie.

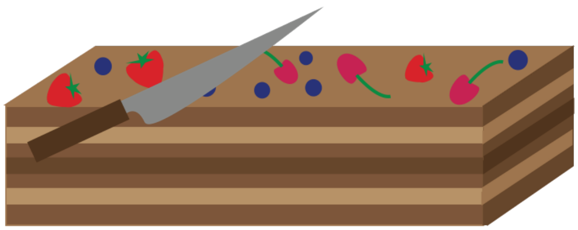


Activité 1 - Un partage sans jalousie d'un gâteau entre deux personnes

Le but est de partager un gâteau entre deux personnes afin qu'aucune n'envie la part reçue par l'autre.

- Demandez au groupe si quelqu'un peut penser à une stratégie pour y parvenir.

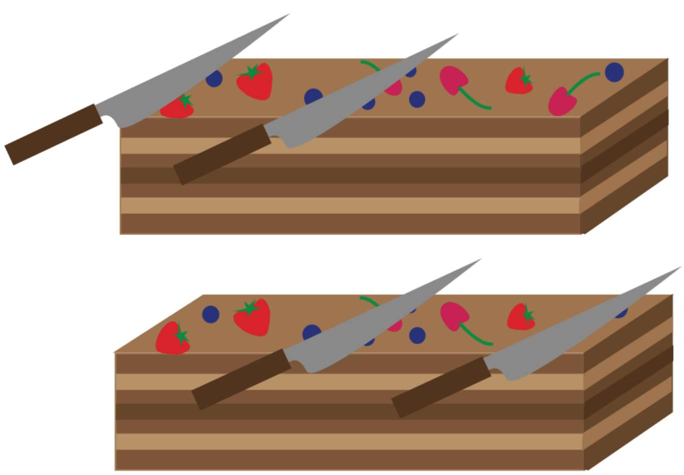
- Proposez la stratégie : "Je coupe, tu choisis" et essayez-la plusieurs fois avec deux participants. Supposons que Maryam coupe et que Caucher choisisse. Comment Maryam devrait-elle couper, pour ne pas envier Caucher ? Une telle division est appelée "sans jalousie".



- Discuter : Vaut-il mieux être la personne qui coupe ou celle qui choisit ?

- Puisqu'il vaut mieux choisir, Maryam propose d'affiner la stratégie précédente. Elle dit à Caucher : *"Je vais déplacer continûment de gauche à droite deux couteaux sur le gâteau. Quand tu me diras d'arrêter, je m'arrêterai et je couperai le gâteau en suivant la position des deux couteaux. Ensuite, je choisirai soit le morceau entre les deux couteaux, soit les deux embouts, et tu auras l'autre part".*

- Discutez : Comment Maryam doit-elle tenir ses couteaux ? Quand Caucher doit-il dire "stop" ?



- Si le groupe de participants ne trouve pas la stratégie, expliquez-la : Maryam devrait tenir ses deux couteaux pour être également heureuse avec n'importe laquelle des deux parts. Caucher devrait dire "Stop !" lorsqu'il est également satisfait des deux parts.

- Mais pourquoi sommes-nous sûrs qu'il y aura au moins un moment où Caucher sera aussi heureux avec n’importe laquelle des deux parts ? Si les participants ne trouvent pas d'explication, proposez et discutez celle qui suit.

- Voici l'explication de la raison pour laquelle il y a au moins un moment où Caucher sera également satisfait des deux parts. Au début, un couteau se trouve sur le bord gauche du gâteau, et l'autre divise le gâteau en deux parts. Supposons que Caucher préfère le morceau de droite (qui est la part "en dehors des couteaux"). À l'autre bout, lorsqu'un couteau se trouve sur le bord droit, le même morceau préféré se trouve maintenant entre les couteaux. De plus, il y a eu un mouvement continu des couteaux dans lequel, au début, Caucher préférait la part à l'extérieur des couteaux, tandis qu'à la fin, il préférait la part entre les couteaux. Ainsi, entre les deux, on est passé par une position où les deux parts ont égale valeur pour lui (c'est une application du théorème de la valeur intermédiaire).

- Nous appelons une telle répartition "équitable" parce que, autant pour Maryam que pour Caucher, les deux parts ont égale valeur pour eux. Une division équitable est sans jalousie, mais l'inverse peut ne pas être le cas.

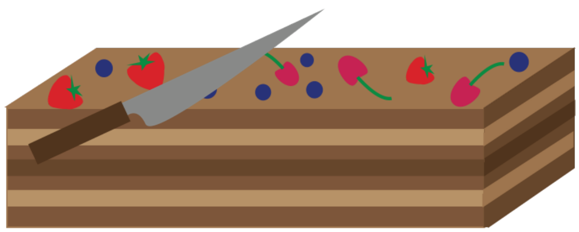
Activité 2 - Une répartition proportionnelle du gâteau entre n personnes

Ici l'objectif est que chaque participant reçoive une part qu'il estime à au moins 1/n du gâteau complet.

- Demandez si quelqu'un veut proposer une méthode.

- Voici une méthode : Le couteau est maintenant dans la main d'un médiateur, qui le déplace de gauche à droite. Dès qu'un participant dit "stop !", le médiateur s'arrête et coupe le gâteau en suivant la position du couteau. Le participant qui a dit "Stop !" reçoit le morceau à gauche du couteau.

- Ensuite, le médiateur recommence à déplacer le couteau sur le morceau de gâteau restant jusqu'à ce qu'un deuxième participant dise "Stop ! Ce participant reçoit le nouveau morceau à gauche du couteau, et ainsi de suite. Le dernier participant (qui n'a jamais dit "Stop !") reçoit le dernier morceau restant.



- Essayez cette méthode plusieurs fois avec l'ensemble du groupe : le médiateur doit déplacer le couteau très, très, très lentement pour que les participants aient le temps de décider de leur stratégie. Certains participants ont-ils l'impression d'avoir reçu un morceau qui est inférieur à leur part d'1/n de l'ensemble du gâteau ? Si oui, comment peuvent-ils modifier leur stratégie ?

- Voici une stratégie de répartition proportionnelle : chaque participant dit "Stop !" dès qu'il constate que la valeur à gauche du couteau vaut pour lui au moins 1/n de la valeur totale du gâteau. Expliquez pourquoi cette stratégie garantit que chaque participant recevra un morceau qu'il estime valoir au moins 1/n de la valeur totale du gâteau.

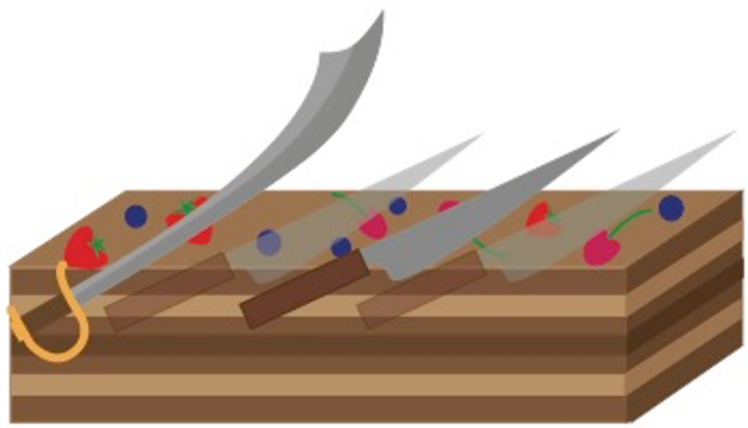
- Notez que cette stratégie n'est pas sans jalousie. Pourquoi ne l'est-elle pas ?

Activité 3 - Un partage du gâteau sans jalousie entre 3 personnes

L'objectif est maintenant de diviser le gâteau de manière à ce qu'aucun participant n'envie les morceaux de gâteau reçus par les deux autres.

- Demandez si quelqu'un veut proposer une stratégie.

- Voici une stratégie : Le médiateur tient un sabre et le déplace de gauche à droite. En même temps, chaque participant déplace un couteau sur le côté droit du sabre. Dès qu'un participant dit "Stop !", tout le monde arrête de bouger son couteau. Le gâteau est coupé en deux endroits : aux positions du sabre et du couteau du milieu. Le participant qui a dit "Stop !" reçoit le morceau à gauche du sabre. Parmi les deux participants restants, celui dont le couteau est le plus à droite reçoit le morceau de droite, et le participant restant reçoit le morceau du milieu.



- Essayez cette méthode à plusieurs reprises avec différents membres jouant le rôle de médiateur. Le médiateur doit déplacer le sabre très, très lentement afin que les participants aient le temps de décider de leur stratégie. Certains participants envient-ils la part d'un autre participant ? Quelqu'un souhaite-t-il proposer une stratégie pour la façon dont chaque participant doit déplacer son couteau ?

- Voici une stratégie pour une division sans jalousie :
    - Chaque participant tient son couteau de façon à ce que les deux parts qu'il délimite, à droite du sabre, aient la même valeur pour lui.
    - Appelons "participant 1" celui dont le couteau est le plus à gauche, "participant 2" celui dont le couteau est au milieu, et "participant 3" celui dont le couteau est le plus à droite.
    - Le participant 1 dit "Stop !" lorsqu'il constate que le morceau de gauche a la même valeur pour lui que le morceau du milieu.
    - Le participant 2 dit "Stop !" lorsque les trois parts ont la même valeur pour lui.
    - Le participant 3 dit "Stop !" lorsqu'il constate que la valeur de la part de gauche est la même que celle de la part de droite.

- Discutez des raisons pour lesquelles cette stratégie est sans jalousie. Prenez le point de vue de chaque participant et expliquez pourquoi aucun participant n'envie la part des autres.

Activité 4 - Une répartition des corvées sans jalousie entre 3 personnes

Si nous mettons les corvées dans une grille, nous pouvons les répartir comme un gâteau. Dans ce cas, chaque participant voudra obtenir une portion aussi petite que possible. Notre objectif est alors qu'aucun participant n'envie la part de corvées des autres.

- Ce problème est analogue à celui de l'activité 3, et nous pouvons en tirer une stratégie. Quelqu'un a-t-il une idée ?

- Voici une stratégie. Le médiateur tient maintenant un sabre et le déplace de gauche à droite. En même temps, chaque personne déplace un couteau à droite du sabre. Dès qu'un participant dit "Stop !", tout le monde arrête de bouger son couteau. La grille est coupée en deux endroits : aux positions du sabre et du couteau du milieu. Le participant qui a dit "Stop !" reçoit la portion la plus à droite. Parmi les deux autres participants, celui dont le couteau est le plus à droite reçoit la portion du milieu, et le dernier reçoit la portion de gauche.

Nettoyer les vitres	**Faire le lavage**	**Faire la cuisine**	**Repasser**
Laver les planchers	**Faire la vaisselle**	**Sortir les ordures**	**Nourrir le chat**
Passer l'aspirateur	**Arroser les plantes**	**Mettre le couvert**	**Faire l'épicerie**
Nettoyer la salle de bains	**Tondre le gazon**	**Balayer**	**Recycler**

- Essayez cette méthode à plusieurs reprises avec différents membres jouant le rôle de médiateur. Le médiateur doit déplacer le sabre très lentement afin que les participants aient le temps de décider de leur stratégie. Certains participants envient-ils la part d'un autre participant

? Quelqu'un souhaite-t-il proposer une stratégie pour la façon dont chaque participant doit déplacer son couteau ?

- Voici une stratégie pour une répartition des corvées sans jalousie :
    - Tous les participants tiennent leur couteau de manière à ce que la portion la plus à gauche ait la même valeur, pour eux, que la portion située entre le sabre et leur propre couteau.
    - Appelons "participant 1" celui dont le couteau est le plus à gauche, "participant 2" celui dont le couteau est au milieu, et "participant 3" celui dont le couteau est le plus à droite.
    - Le participant 1 dit "Stop !" dès qu'il constate que la valeur de la portion de gauche a la même valeur pour lui que celle de la portion de droite.
    - Le participant 2 dit "Stop !" lorsque les trois portions ont la même valeur pour lui.
    - Le participant 3 dit "Stop !" dès qu'il constate que la valeur de la portion du milieu est, pour lui, la même que celle de la portion de droite.

- Discutez des raisons pour lesquelles cette stratégie est sans jalousie. Prenez le point de vue de chaque participant et expliquez pourquoi aucun participant n'envie la part des autres.

Créez et partagez !
Partagez des photos et des vidéos de l'activité ou des stratégies proposées par le groupe, en utilisant le hashtag **#idm314**.

Approfondissez le sujet avec quelques vidéos :

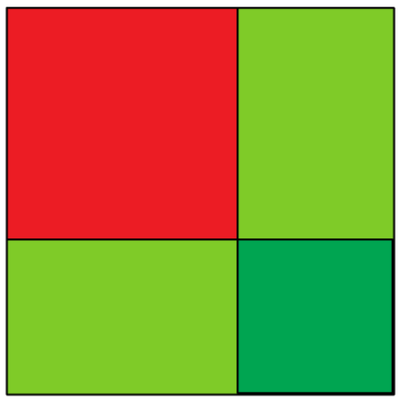
- See a different method to share a cake between three people, explained by Hannah Fry in a Numberphile video.
- Math Encounters - Fair Division: How to Cut Cakes (and other things) Fairly. Un exposé sur la répartition équitable par le professeur Francis Su au musée MoMath.

ACTIVITÉ
Preuves sans mots

Voici quelques preuves sans mots qui peuvent être discutées en classe. Le titre est ce qu'on veut prouver. Le dessin en est la preuve.

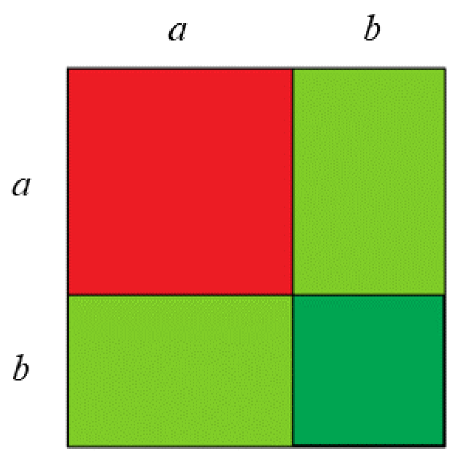
PREUVE 1

Identité remarquable : $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$



Consignes :
- Donner la formule et le dessin.
- Laisser les élèves réfléchir en groupes.
- Demander si certains élèves veulent expliquer la preuve devant la classe.

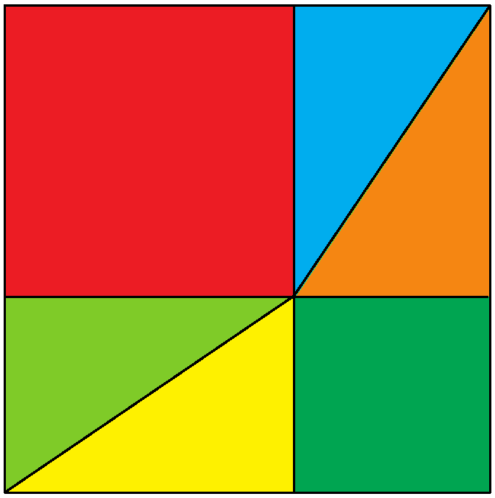
Solution



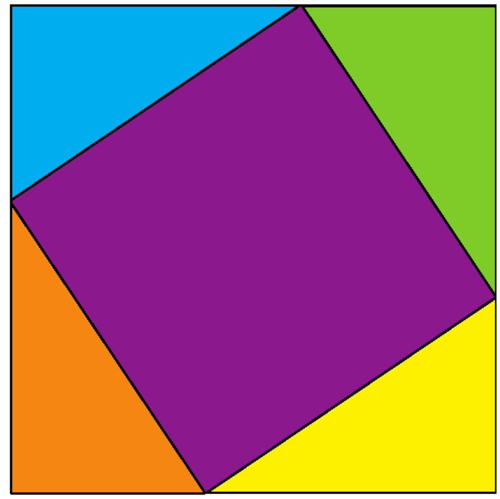
L'aire du grand carré, de côté *(a+b)*, est la somme des aires des quatre carrés et rectangles colorés.

PREUVE 2

Théorème de Pythagore : $a^2 + b^2 = c^2$



$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$

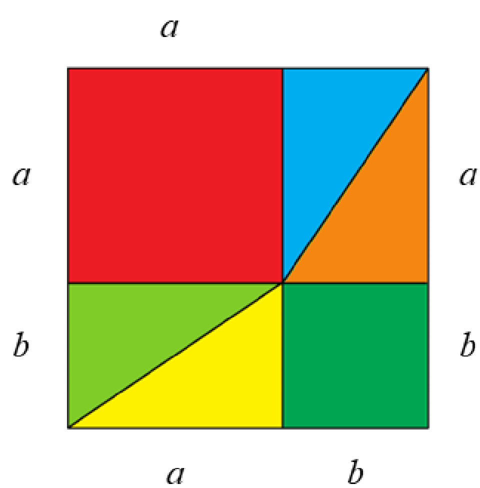


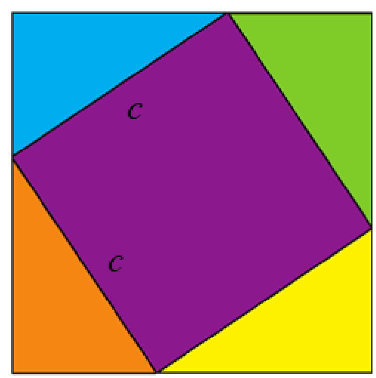
$(a+b)^2 = c^2 + 2ab$

Consignes :

- Donner la formule et le dessin.
- Laisser les élèves réfléchir en groupes.
- Demander si certains élèves veulent expliquer la preuve devant la classe.

Solution



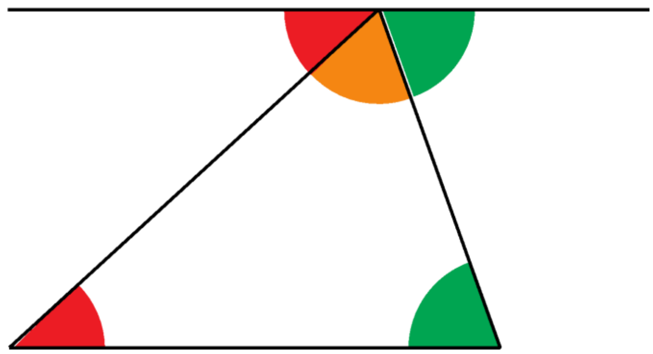


Les 2 figures forment un même carré de côté *(a+b)*. Dans le carré de gauche, le grand carré rouge = a^2 et petit carré vert = b^2. Les 2 rectangles vert/jaune et bleu/orange ont la même aire, soit *ab.* L'ensemble des carrés vert et rouge dans la figure de gauche a la même aire que le carré mauve de la figure de droite, soit (a^2+b^2) pour la figure de gauche et c^2 pour la figure de droite.

À lire : [Encore une preuve du théorème de Pythagore]

En animé : https://mathsamodeler.ujf-grenoble.fr/LAVALISE/Preuvessansmot/pyt.htm

PREUVE 3

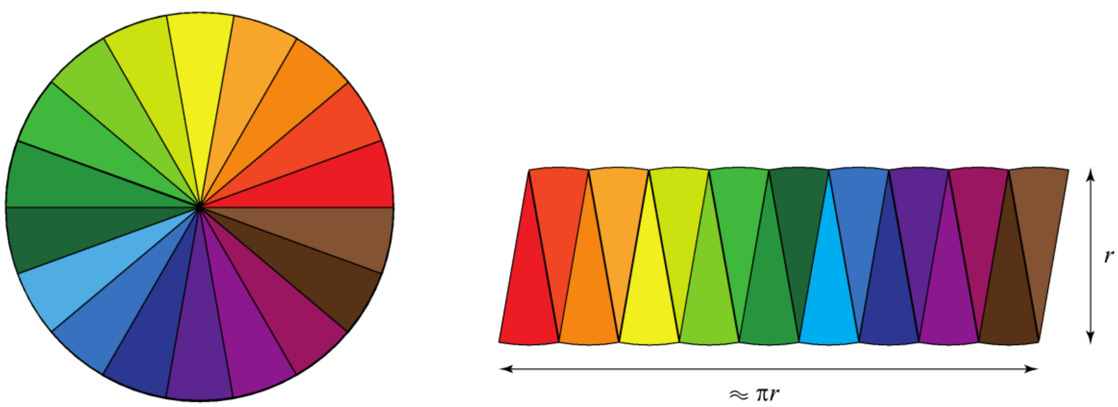


Consigne : Il n’y a pas de titre ! Demander aux élèves d’essayer de deviner ce qui est prouvé.

Solution
C’est la preuve que la somme des angles d’un triangle vaut 180º.

PREUVE 4

$$A = \pi r^2$$



Consigne : Demander aux élèves d’essayer de deviner ce qui est prouvé.

Solution
C’est un argument heuristique : l’aire d’un cercle est donnée par son rayon multiplié par la moitié de sa circonférence. Il faut alors discuter le fait que c’est une manière équivalente de calculer l’aire d’un cercle.