POUR FAIRE AIMER LES MATHÉMATIQUES

Les maths antiques

PIERRE CHASTENAY
astronome

LES MATHÉMATIQUES, À L'AUBE DES DÉCOUVERTES SCIENTIFIQUES

Dans un article paru en 1960 sous le titre *The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences*, le physicien Eugene Wigner remarquait que les percées en mathématiques ont souvent précédé les découvertes scientifiques. Elles ont ensuite permis de les formaliser, un peu comme si l'essence même des lois de la nature et des mécanismes à l'œuvre dans le monde naturel « existaient » déjà dans les abstractions mathématiques. Wigner concluait son article en écrivant : « l'énorme utilité des mathématiques dans les sciences naturelles est quelque chose qui frise le mystère et il n'y a pas d'explication rationnelle à cela. » Soixante ans plus tard, ces mots sont toujours vrais…

SON NOMBRE PRÉFÉRÉ

1

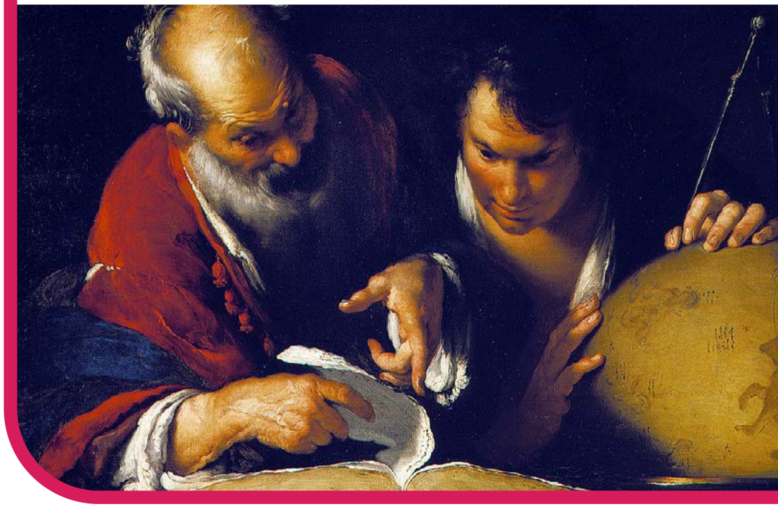
Il n'y a, à l'heure actuelle, qu'une seule planète dans tout l'Univers sur laquelle nous savons que la vie existe, la Terre. Soit ce nombre est appelé à augmenter, signalant que l'Univers foisonne de vie, soit il restera inchangé, nous laissant à jamais seuls dans le cosmos. Les deux possibilités donnent le vertige.

ACTIVITÉ

1 L'inaccessible étoile (niveau avancé)
Avec peu de moyens techniques, les astronomes grecs de l'Antiquité ont mesuré le diamètre de la Terre, la distance Terre-Lune et ont estimé la distance Terre-Soleil. La théorie héliocentrique, puis l'invention du télescope, ont permis de poursuivre sur cette lancée. Explorons les relations trigonométriques, la triangulation et l'unité astronomique.

2 Mesurer l'Univers (niveau avancé)
Mesurer la taille des objets qui nous entourent ou la distance qui nous en sépare est un jeu d'enfant. Mais, lorsqu'il est question de mesurer les distances entre les astres et la taille de ceux-ci, le défi est de taille. Des générations de savants l'ont relevé avec brio. Grâce aux angles, mesurons les distances de la Terre au Soleil et à la Lune, ainsi que la circonférence de la Terre.

3 Un peu plus loin ! (niveau avancé)
La spectroscopie permet d'aller plus loin et de déterminer la distance des étoiles trop éloignéespour avoir une parallaxe mesurable. Explorons la photométrie et la spectroscopie.



Science pour tous! CRSNG NSERC Québec

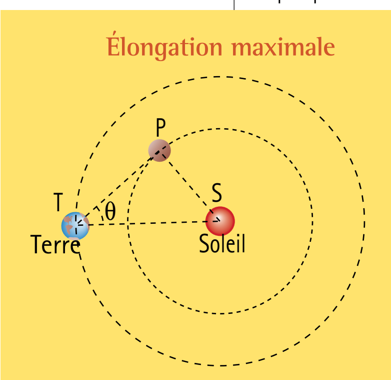
Avec peu de moyens techniques, les astronomes grecs de l'antiquité ont mesuré le diamètre de la Terre, la distance Terre-Lune et estimé la distance Terre-Soleil[1]. La théorie héliocentrique, puis l'invention du télescope, ont permis de poursuivre sur cette lancée.

L'inaccessible étoile

Pierre Chastenay
Astronome
Planétarium de Montréal

Distance aux planètes

En se fondant sur sa théorie héliocentrique, qui place le Soleil au centre, Nicolas Copernic a proposé d'étudier les élongations maximales des planètes Mercure et Vénus, dont l'orbite est inscrite à l'intérieur de l'orbite terrestre (on parle alors de *planètes inférieures*) pour déterminer la taille de leur orbite.



Une planète inférieure P est en élongation maximale lorsque, vue de la Terre, la distance angulaire θ la séparant du Soleil est maximale. L'angle SPT est alors un angle droit, ce qui permet d'utiliser le théorème de Pythagore pour déterminer la distance $\overline{PS}$ (le dessin de gauche n'est pas à l'échelle).

Dans une telle situation, on peut écrire la relation trigonométrique suivante :

$$\sin\theta = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}} = \frac{\overline{PS}}{\overline{TS}},$$

d'où : $$\overline{PS} = \overline{TS}\sin\theta.$$

Notons que cette relation donne le rayon de l'orbite de la planète P en fonction du rayon de l'orbite terrestre, et non en valeur absolue. Malheureusement, on ne connaissait pas encore à l'époque une façon de mesurer la distance Terre-Soleil avec plus de précision que celle obtenue par Aristarque de Samos au III^e^ siècle avant notre ère[1]. On créa donc une unité arbitraire, l'unité astronomique (ua), représentant la distance Terre-Soleil. Avec les valeurs d'élongations maximales de Mercure et Vénus valant respectivement 24° et 44°, les astronomes de l'époque déterminèrent que ces planètes se trouvaient à 0,4 ua et 0,7 ua du Soleil.

1. *Voir l'article* Mesurer l'Univers *dans Accromath, vol. 4, hiver-printemps 2009*

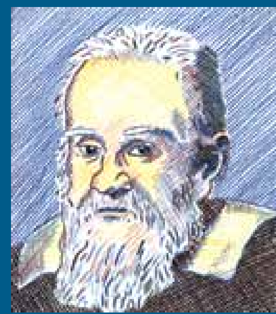
Nicolas Copernic (1473-1543)

Nicolas Copernic est né le 19 février 1473 à Torun en Pologne et est mort le 24 mai 1543 à Frombork (Frauenburg) en Pologne.

En 1495, il partit étudier en Italie aux universités de Bologne et de Padoue. Il y étudia la médecine, les mathématiques, le grec, le droit canon et fut élève et assistant de l'astronome Domenico Maria Novara (1454-1504). C'est à Bologne qu'il fit sa première observation astronomique, le 9 mars 1497. De retour en Pologne, il y pratiqua la médecine durant quelques années même si son occupation principale, comme chanoine, était reliée à sa formation en droit canon.

Copernic attendit jusqu'à la fin de sa vie avant de publier son ouvrage majeur, *De Revolutionibus Orbium Coelestium*, de peur des réactions hostiles du clergé catholique à son système héliocentrique, jugé hérétique à l'époque. Bien que l'héliocentrisme ait fait quelques adeptes dès la publication de l'ouvrage, ce sont les observations d'un autre grand savant, l'astronome italien Galileo Galilei, qui ébranlèrent véritablement et pour toujours les fondations du géocentrisme.

Galileo Galilei (1564-1642)



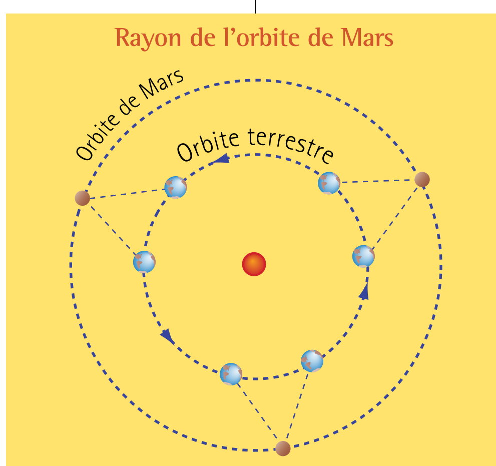
En décembre 1609, Galilée construisit une lunette d'approche qu'il s'empressa de pointer vers le ciel : il découvrit alors des montagnes et des cratères sur la Lune, de curieuses excroissances de part et d'autre de Saturne (Galilée ne saura jamais qu'il s'agit d'anneaux ceinturant la planète), des satellites autour de Jupiter, les phases de Vénus et d'innombrables étoiles dans la Voie lactée. Ces découvertes confirmèrent que le système de Copernic, dans lequel les planètes tournent autour du Soleil, correspondait vraiment à la réalité des observations. Ces observations ont joué un rôle important dans l'adoption du modèle héliocentrique et le rejet du système géocentrique en vigueur depuis Aristote. Une fois acceptée cette idée, les astronomes mirent à profit une foule d'outils géométriques qui leur permirent de s'attaquer de nouveau à la détermination des distances qui séparent les planètes du système solaire.

Kepler et la planète Mars

Le fait que, dans le système héliocentrique, la Terre tourne désormais autour du Soleil comme les autres planètes, offrait aux astronomes une occasion inespérée d'observer le ciel de divers points de vue le long de l'orbite terrestre et d'appliquer une technique de mesure appelée *triangulation*. Quiconque a deux yeux est déjà familier avec la triangulation : ce sont les points de vue légèrement différents que chacun de nos yeux envoient au cerveau qui permettent, par comparaison, d'estimer la distance qui nous sépare des objets qui nous entourent. Malheureusement, la faible séparation des yeux limite la triangulation visuelle à quelques mètres. Pour mesurer des distances astronomiques par triangulation, il faudrait que nos yeux soient éloignés de plusieurs millions de kilomètres ! Heureusement, le diamètre de l'orbite terrestre offre justement une telle séparation, pour peu que les observateurs conservent des notes précises de leurs observations.

Johannes Kepler (1571-1630) a utilisé une telle approche pour déterminer le rayon de l'orbite de la planète Mars. Kepler entendait tirer avantage de la révolution de la Terre autour du Soleil pour comparer des positions de la planète Mars observées à intervalles réguliers par rapport aux étoiles lointaines. Mais un problème de taille se posait : tandis que la Terre avance sur son orbite, la planète observée avance aussi. Comment s'assurer que Mars soit au même point de son orbite d'une observation à l'autre ?

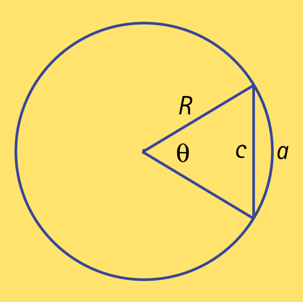
Kepler résolut ce problème de manière ingénieuse. L'astronome savait, grâce aux calculs de Copernic, qu'il fallait à la planète Mars 1,88 an pour revenir au même point de son orbite. Il compara donc les positions observées de Mars vues de la Terre à 1,88 ans d'intervalle : pour chaque paire d'observation, Mars était au même point de son orbite, mais pas la Terre, puisque notre planète avait fait plus d'un tour sur sa propre orbite (1,88 tour, en réalité). La seconde visée était donc différente de la première. L'intersection de chaque paire de visées marquait une position de la planète Mars. En répétant les paires de mesures, on pouvait tracer l'ensemble de l'orbite martienne.



Rayon de l'orbite de Mars

En prenant une orbite terrestre de rayon égal à 1 ua comme base de triangulation, Kepler put calculer que le rayon de l'orbite de Mars était

Relation du triangle étroit



Dans un cercle de rayon R, un angle θ intercepte un arc de cercle a, lui-même sous-tendu par une corde c.

La longueur de l'arc intercepté est proportionnelle à l'angle au centre. Si l'angle θ vaut 360°, il intercepte la circonférence, $2\pi R$. On a donc :

$$\frac{2\pi R}{a} = \frac{360°}{\theta}, \text{ d'où } \frac{R}{a} = \frac{57{,}3°}{\theta}.$$

Dans le cas des triangles étroits ($\theta < 10°$), on peut considérer que l'arc de cercle a et la corde c qui le sous-tend sont approximativement d'égale longueur. Par conséquent, on peut écrire :

$$\frac{R}{c} \approx \frac{57{,}3°}{\theta}.$$

Cette relation est fort utile en astronomie où les angles mesurés sont souvent très petits, de l'ordre de la seconde d'arc (1/3600^e de degré). Les astronomes utilisent généralement la relation du triangle étroit sous la forme suivante :

$$\frac{R}{c} \approx \frac{2{,}06 \times 10^5}{\alpha},$$

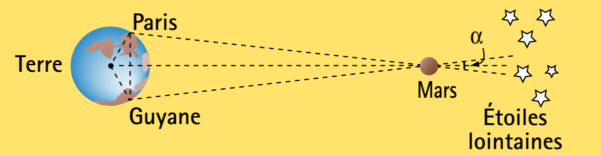
où l'angle étroit θ est exprimé en seconde d'arc.

1,5 fois plus grand que celui de l'orbite terrestre, soit 1,5 au. En répétant patiemment des observations similaires pour les autres planètes supérieures, Jupiter et Saturne, les astronomes purent déterminer avec précision les distances moyennes entre les planètes et le Soleil, exprimées en unités astronomiques.

L'unité astronomique

Connaissant les grandeurs relatives des orbites des planètes, les astronomes ont ensuite cherché à déterminer la valeur de l'unité astronomique afin de connaître la grandeur réelle du système solaire. Ce sont les astronomes français Jean Richer et Jean-Dominique Cassini qui ont résolu le problème. En 1671, lors d'une opposition de Mars (Mars étant alors à l'opposé du Soleil dans le ciel), les deux observèrent au même moment (convenu d'avance) la position de la planète rouge par rapport aux étoiles situées en arrière-plan, Cassini à l'observatoire de Paris, en France, et Richer en Guyane française, en Amérique du Sud.

Détermination de l'unité astronomique



De retour à Paris, Richer compara ses observations à celles de Cassini; les astronomes constatèrent bel et bien une légère différence entre les positions de Mars vues de France et d'Amérique du Sud. La différence était faible, quelques millièmes de degrés à peine, mais suffisante pour effectuer un calcul de triangulation. Connaissant la distance $\overline{PG}$ entre Paris et la Guyane, Cassini et Richer purent effectuer le calcul suivant pour la distance Terre-Mars $\overline{TM}$, basé sur la relation du triangle étroit (voir l'encadré ci-dessus) :

$$\frac{\overline{TM}}{\overline{PG}} = \frac{2{,}06 \times 10^5}{\alpha}.$$

On considère ici que les distances Paris-Mars ou Guyane-Mars sont suffisamment semblables à la distance $\overline{TM}$ entre la Terre et Mars pour utiliser cette dernière dans l'équation ci-contre. Par conséquent :

$$\overline{TM} = \overline{PG} \times \left(\frac{2{,}06 \times 10^5}{\alpha}\right).$$

Avec $\alpha = 24''$ et $\overline{PG} = 7\,200$ km, on obtient : $\overline{TM} = 61\,800\,000$ km.

Connaissant désormais la distance réelle entre la Terre et sa voisine, Cassini et Richer avaient enfin en main un facteur d'échelle qui leur permit de calculer la distance réelle entre la Terre et le Soleil, soit 140 millions de kilomètres, ce qui est remarquablement proche de la valeur moderne de 150 millions de km. De là découlèrent ensuite toutes les autres mesures de distance entre les planètes du système solaire, ce qui plaçait Saturne (la plus lointaine planète connue à l'époque) à un incroyable 1 milliard 330 millions de kilomètres du Soleil. La valeur moyenne moderne est 1,426 milliard de km.

Étoiles et parallaxe

L'invention de la lunette astronomique avait non seulement permis de prendre la mesure du système solaire; des télescopes de plus en plus puissants et précis permettaient désormais de s'attaquer à la détermination de la distance aux étoiles, dont on savait qu'elles étaient encore plus lointaines. La méthode privilégiée pour s'attaquer à ce problème consistait à mesurer la parallaxe des étoiles (voir encadré ci-dessous). Malheureusement pour les astronomes, les étoiles sont si lointaines que les parallaxes sont infimes, même pour les étoiles les plus proches. Pendant longtemps, les parallaxes stellaires sont demeurées hors de portée des meilleurs instruments.

Mais en 1838, après des années d'efforts frustrants, l'astronome allemand Friedrich Bessel (1784-1846) parvint enfin à mesurer la parallaxe de l'étoile 61 de la constellation du Cygne. La parallaxe de 61 Cygni était infime, une fraction de seconde d'arc à peine, mais elle plaçait tout de même cette étoile à une distance ahurissante de 11,2 années-lumière de la Terre ! La sphère des étoiles venait d'exploser, littéralement, et l'Univers allait s'avérer beaucoup plus grand que ce que l'on imaginait jusque là.

Une fois la mesure de Bessel confirmée, les astronomes entreprirent de mesurer systématiquement la distance de toutes les étoiles voisines du Soleil jusqu'aux plus lointaines dont ils pouvaient encore mesurer le parallaxe. La mesure des parallaxes stellaires a toutefois une limite, imposée par le diamètre de l'orbite terrestre et la précision des télescopes servant à mesurer les petits angles. Même le satellite Hipparcos, placé sur orbite terrestre par l'Agence spatiale européenne en 1989 pour mesurer la distance d'étoiles de plus en plus lointaines, n'a plus été capable de mesurer avec précision les parallaxes d'étoiles situées au-delà de 1 000 années-lumière, puisque les angles correspondants étaient trop faibles pour ses instruments.

Photométrie et spectroscopie

Les astronomes ayant atteint les limites de ce que la géométrie leur permettait de mesurer, ils cherchèrent de nouveaux moyens pour pousser plus loin leurs mesures du Cosmos. Nous verrons dans le troisième texte de cette série que deux techniques nouvelles, la photométrie et la spectroscopie, vont devenir leurs meilleures alliées dans cette entreprise.

Parallaxe des étoiles

La grande différence entre les planètes et les étoiles, c'est que ces dernières sont fixes sur le fond du ciel[1] tandis que les planètes se déplacent constamment. Cela a donné aux astronomes l'idée d'utiliser le déplacement annuel de la Terre sur son orbite pour créer deux visées d'une même étoile fixe avec la plus large base possible, soit le diamètre de l'orbite terrestre. Ainsi, deux visées d'une étoile proche prises à six mois d'intervalle devraient montrer un léger déplacement de l'étoile par rapport aux étoiles plus lointaines situées en arrière-plan.

Un observateur vise l'étoile E et note sa position par rapport aux autres étoiles de cette région du ciel. Six mois plus tard, le même observateur vise à nouveau l'étoile E et note une nouvelle position. La moitié de l'angle α mesuré sur le ciel et séparant ces deux positions apparentes de l'étoile E est définie comme l'angle θ et se nomme *parallaxe*.

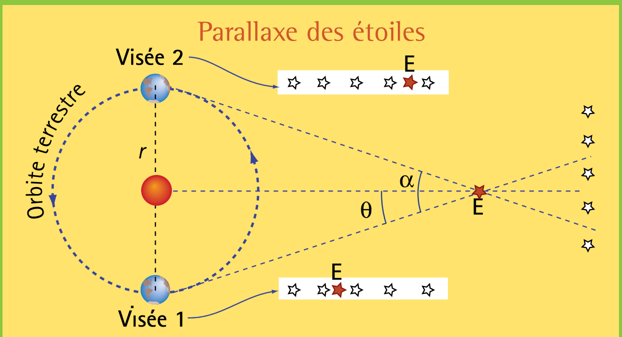
La relation des triangles étroits[2] nous sert encore ici à établir la relation entre le rayon r de l'orbite terrestre (égal à 1 ua) et la distance D qui nous sépare d'une étoile dont la parallaxe est θ :

$$D = 2r \times \frac{2{,}06\times 10^5}{\alpha} = r \times \frac{2{,}06\times 10^5}{\theta}.$$

Substituant la valeur connue de r, convertie en années-lumière[3], dans l'équation, on obtient :

$$D = \frac{3{,}26}{\theta}\ \text{al},$$

où θ est exprimé en seconde d'arc.



1. *Les étoiles sont en réalité animées de mouvements propres (révolution autour du centre de la Galaxie), mais ces mouvements sont négligeables sur une période d'une année terrestre.*
2. *La relation des petits angles permet de remplacer la tangente d'un angle par l'angle lui-même si celui-ci est exprimé. Or,*

   *1 rad = 57,3 deg = 57,3 * 3600 sec. arc = $2{,}06\times10^5$*
3. *Une année-lumière est la distance franchie par un rayon de lumière en un an, à la vitesse de 300 000 km/s. Une année-lumière (al) correspond à environ dix mille milliards de kilomètres.*

Mesurer la taille des objets qui nous entourent ou la distance qui nous en sépare est un jeu d'enfant. Mais, lorsqu'il est question de mesurer les distances entre les astres et la taille de ceux-ci, le défi est de taille. Des générations de savants l'ont relevé avec brio.

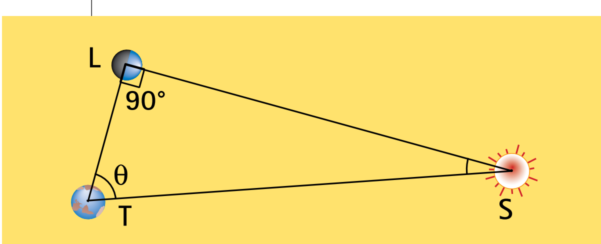
Mesurer l'Univers

Pierre Chastenay
Astronome
Planétarium de Montréal

De la Terre au Soleil

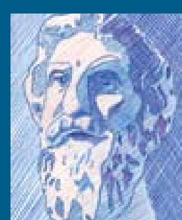
Le premier jalon de cette vaste entreprise de mesure a été posé par le philosophe et mathématicien grec Pythagore, au VIᵉ siècle avant notre ère. Non pas que Pythagore ait lui-même entrepris de mesurer le cosmos; c'est plutôt son célèbre théorème qui a ouvert la voie à ses successeurs. Car la trigonométrie est à la base des toutes premières tentatives pour mesurer le ciel...

Par exemple, Aristarque de Samos entreprit de mesurer la distance qui nous sépare du Soleil en se fondant uniquement sur ses observations et sur le théorème de Pythagore. Aristarque savait qu'au premier quartier de la Lune, la Terre, la Lune et le Soleil forment un triangle dans l'espace. Aristarque avait compris que lorsque la moitié du disque lunaire est éclairée, l'angle au sommet occupé par la Lune doit être de 90°. Le théorème de Pythagore peut donc être utilisé pour évaluer la grandeur de la ligne Terre-Soleil, qui est l'hypoténuse du triangle Terre-Lune-Soleil. Cela revient, en réalité, à mesurer l'angle entre le Soleil et la Lune, l'angle θ dans la figure ci-dessous, au moment du premier quartier.



La figure n'est pas à l'échelle, mais elle permet de voir que la distance Terre-Soleil est proportionnelle à l'angle θ. Aristarque savait, en tentant de mesurer l'angle θ, que plus celui-ci est proche de 90 degrés, plus le Soleil est éloigné de la Terre.

Aristarque de Samos
~310 – ~230



Aristarque est né dans l'île de Samos et il a probablement étudié à Alexandrie sous la direction de Strato de Lampsacos. Le seul ouvrage d'Aristarque qui a été conservé est un petit traité intitulé *Sur les dimensions et distances du Soleil et de la Lune*. Il y décrit comment il a cherché à déterminer ces distances et dimensions et les résultats qu'il a obtenus. Il fut le premier à proposer un système héliocentrique, c'est-à-dire un Univers centré sur le Soleil. Ce système eut un certain succès mais fut rejeté principalement pour deux raisons. Premièrement, on ne pouvait concevoir qu'un objet lourd comme la Terre puisse être en mouvement. La deuxième raison est l'absence apparent de parallaxe des étoiles proches. Si la Terre se déplace, on devrait voir les étoiles fixes suivant un angle différent selon la période de l'année. Aristarque a émis l'hypothèse que cette différence d'angle (parallaxe) existe bien mais n'est pas décelable car les étoiles fixes sont situées très loin de la Terre. Son hypothèse était exacte, la parallaxe est maintenant mesurable.

Sans instrument d'observation précis, la détermination du moment exact du premier quartier de Lune et la mesure de l'angle entre la Lune et le Soleil ont posé d'énormes difficultés à Aristarque. Malgré tout, il parvint à estimer l'angle θ à 87 degrés, ce qui plaçait le Soleil 19 fois plus loin de la Terre que la Lune. Si on utilise plutôt la valeur moderne de θ = 89,85 degrés, on obtient que le Soleil est environ 400 fois plus loin de la Terre que la Lune.

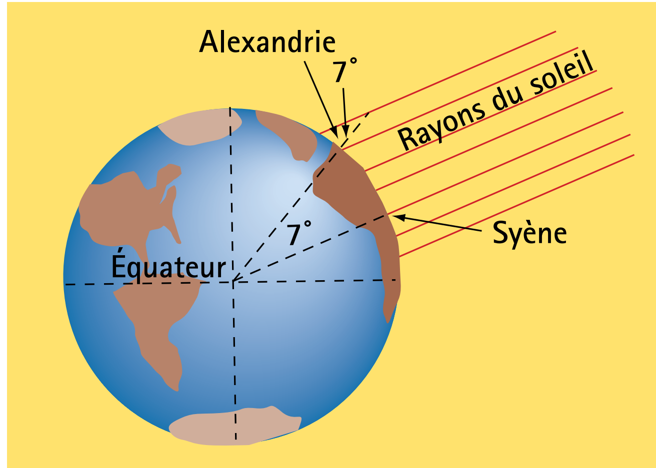
Même si son résultat était imprécis, Aristarque en déduisit tout de même que, puisque le Soleil était situé 19 fois plus loin que la Lune et que les deux astres avaient le même diamètre apparent vu de la Terre (ce qui est évident au vu d'une éclipse totale de Soleil), cela signifiait que le diamètre du Soleil devait être 19 fois supérieur à celui de

la Lune. En observant une éclipse de Lune, Aristarque constata en outre que le diamètre de notre satellite est compris entre un quart et une demie du diamètre de la Terre (du moins, de son ombre). Cela signifie que le diamètre du Soleil est de 5 (≈ 19/4) à 10 (≈ 19/2) fois plus grand que celui de la Terre.

Cela conduisit Aristarque à conclure que, puisque le Soleil était plus gros que la Terre et la Lune, il devait être au centre de l'Univers, position jusque-là occupée par notre planète. Cette proposition, fort peu orthodoxe pour l'époque, allait lui attirer bien des ennuis avec les autorités religieuses de son temps… En réalité, il faudra attendre près de 18 siècles avant que l'héliocentrisme ne s'impose finalement, ce sur quoi nous reviendrons dans le second article de cette série.

La circonférence de la Terre

On remarque que la mesure par Aristarque de Samos de la distance Terre-Soleil correspond à une valeur relative (fonction de la distance Terre-Lune), et non une valeur absolue, comme une distance en kilomètres. Il revient à un autre savant grec, Ératosthène, d'avoir le premier réussi à établir une telle mesure réelle, celle de la circonférence de la Terre. Et encore une fois, ce sont quelques observations et un simple raisonnement géométrique qui lui permirent de réussir cet exploit.



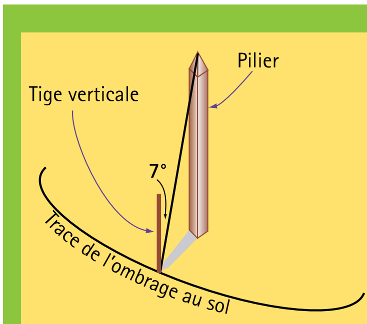
Ératosthène vivait à Alexandrie, au nord de l'Égypte. On lui avait rapporté que le jour du solstice d'été, le Soleil de midi se réfléchissait au fond d'un puit creusé à Syène, une ville située plus au sud. Autant dire que ce jour-là, le Soleil de midi était au zénith (à la verticale) à Syène. Or, le même jour, le Soleil de midi n'était pas au zénith à Alexandrie, puisqu'un obélisque projetait une ombre faisant un angle de 7 degrés par rapport à la verticale.

Ératosthène savait que la Terre est ronde, il connaissait la distance entre Alexandrie et Syène et supposait que le Soleil était suffisamment loin de la Terre – au moins 19 fois plus loin que la Lune ! – pour que l'on puisse considérer ses rayons comme parallèles. Puisque les angles alternes internes d'une sécante à deux droites parallèles sont égaux entre eux, Ératosthène détermina donc qu'un angle de 7 degrés devait séparer Alexandrie et Syène par rapport au centre de la Terre. La circonférence de la Terre pouvait par conséquent être calculée grâce à la formule suivante :

$$\text{Circ.} = \frac{360°}{7°} \times \left(\begin{array}{c} \text{distance} \\ \text{d'Alexandrie à Syène} \end{array} \right).$$

Les historiens ne s'entendent pas sur la valeur exacte de la distance en stades (l'unité de mesure de l'époque) qu'aurait utilisée Ératosthène dans son calcul. Mais si on utilise la valeur la plus communément acceptée et qu'on la convertit en kilomètres, cela donne 820 kilomètres entre les deux villes et on obtient une circonférence de 42 171 km, ce qui est remarquablement proche de la valeur moderne de 40 074 km ! Le rayon et le diamètre de la Terre se calculent ensuite facilement grâce à la formule $C = 2\pi R$[1].

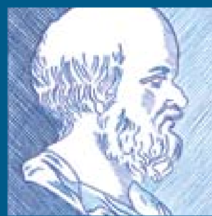
1. Archimède (~287 – ~212), contemporain et correspondant d'Ératosthène, a calculé que 223/71 < π < 220/70.



Pour déterminer à quel moment le Soleil est au plus haut, il faut marquer régulièrement la pointe de l'ombre sur le sol au cours de la journée. La figure alors décrite est une portion d'ellipse. Lorsque la pointe de l'ombre est le plus près du pied du pilier, il est midi. Il ne restait plus qu'à mesurer la distance d'Alexandrie à Syène.

Ératosthène de Cyrène

~276 - ~197 ou ~194

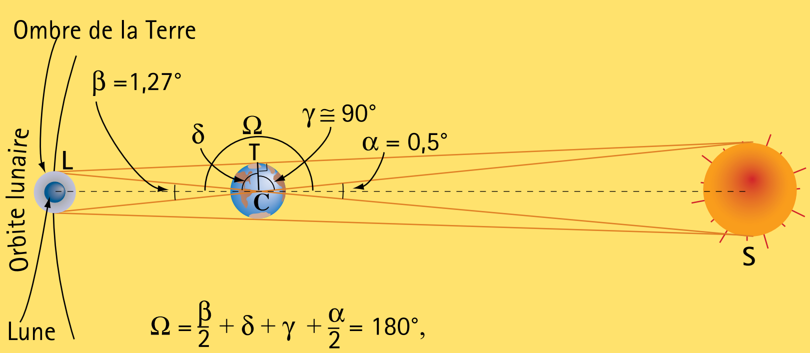


Ératosthène est né en ~276 à Cyrène (Shahhat, Libye). Après avoir étudié à Alexandrie et à Athènes, il s'est installé à Alexandrie où il devint directeur de la bibliothèque. Il a fait des recherches en géométrie et en théorie des nombres. En mathématiques, il est connu par le *crible d'Ératosthène* qui consiste à éliminer de la liste des nombres tous les multiples des nombres premiers. Les nombres restants sont les nombres premiers. Le crible, sous une forme modifiée, est encore un instrument utilisé de nos jours en théorie des nombres.

Sa plus grande réalisation est une mesure assez précise de la circonférence terrestre. Il a compilé un catalogue d'étoiles. Il est devenu aveugle à la fin de sa vie et on croit qu'il s'est laissé mourir de faim. Il est mort à Alexandrie, mais on n'a pas de certitude quant à l'année de sa mort, qui se situerait entre ~197 et ~194.

De la Terre à la Lune

En se basant sur les travaux d'Aristarque de Samos et d'Ératosthène, l'astronome grec Hipparque réussit lui aussi un exploit remarquable : mesurer la distance réelle entre la Terre et la Lune avec une précision de 10 % à l'aide d'une simple horloge à eau et d'un rapporteur d'angles rudimentaire. La clé de la méthode d'Hipparque est l'observation de la durée d'une éclipse totale de la Lune. La géométrie de la situation étudiée par Hipparque est représentée à la figure ci-dessous.



$$\Omega = \frac{\beta}{2} + \delta + \gamma + \frac{\alpha}{2} = 180°,$$

d'où $\delta = 180° - 90° - 0{,}25° - \frac{1{,}27°}{2} = 89{,}12°$.

Sur cette illustration, α est l'angle sous-tendu par le Soleil, β est l'angle sous-tendu par l'ombre de la Terre et traversé par la Lune lors d'une éclipse, tandis que γ et δ sont deux angles a priori inconnus. La ligne CT représente le rayon de la Terre (connu depuis Ératosthène) tandis que CL représente la distance entre la Terre et la Lune. La ligne pointillée relie le centre du Soleil et celui de la Terre (ce dessin n'est pas à l'échelle).

Hipparque connaissait déjà l'angle α sous-tendu par le Soleil, égal à 0,5 degrés. Pour calculer l'angle β sous-tendu par l'ombre de la Terre à la distance où se trouve la Lune éclipsée, il mesura d'abord le temps requis pour que la Lune complète une orbite autour de la Terre, soit 29,5 jours (mois synodique) ou 708 heures. Il mesura ensuite la durée des plus longues éclipses de Lune, environ 2,5 heures. Ces deux mesures lui permirent d'effectuer le calcul suivant pour β :

$$\beta = \left(\frac{2{,}5\text{ h}}{708\text{ h}}\right) \times 360° = 1{,}27°.$$

Hipparque raisonna que, puisque l'on pouvait considérer le Soleil comme étant beaucoup plus loin de la Terre que la Lune (au moins 19 fois plus loin, si l'on en croit Aristarque de Samos), alors on pouvait sans trop se tromper affirmer que l'angle γ était égal à 90 degrés. Enfin, il apparaît clairement sur la figure que la ligne reliant le centre du Soleil au centre de la Terre coupe les angles α et β en deux parties égales. Hipparque considéra donc la somme suivante :

$$\frac{\beta}{2}+\delta+\gamma+\frac{\alpha}{2}=180°$$

En isolant δ et en substituant les valeurs connues dans l'équation, on obtient que l'angle δ vaut 89,12 degrés. Or, le triangle CTL est un triangle rectangle. Par conséquent, la distance Terre-Lune CL peut être facilement calculée grâce aux relations trigonométriques :

$$\cos\delta=\frac{\overline{CT}}{\overline{CL}},\ \text{d'où}\ \overline{CL}=\frac{\overline{CT}}{\cos\delta}=65\times\overline{CT}.$$

Hipparque obtint le résultat remarquablement précis que la distance Terre-Lune équivaut à 65 fois le rayon terrestre (la valeur moderne est 60). Connaissant le rayon de la Terre grâce aux travaux d'Ératosthène, Hipparque put calculer la valeur réelle de la distance Terre-Lune avec une précision de l'ordre de 10 %, un véritable triomphe pour la géométrie ! De là, il put également calculer la valeur réelle de la distance du Soleil, 19 fois plus loin que la Lune, ou 1 235 rayons terrestres.

Au tour des planètes

Grâce aux trois génies grecs dont nous venons d'exposer les travaux, on connaissait au II[e] siècle avant notre ère les valeurs réelles du diamètre de la Terre et des distances Terre-Lune et Terre-Soleil (quoique, dans ce dernier cas, on se doutait que cette valeur était très imprécise). Il restait toutefois aux astronomes grecs de l'Antiquité un dernier territoire à conquérir et à mesurer : le système solaire. De telles mesures allaient cependant leur échapper pour deux raisons. D'abord, sans instrument d'observation adéquat (le télescope ne sera inventé que 18 siècles plus tard), les planètes demeuraient de simples points de lumière et ne se prêtaient donc pas au type d'observations et de mesures que l'on avait faites sur le Soleil et la Lune.

Mais le principal obstacle demeurait le géocentrisme, qui empêchait les savants de l'époque de comprendre la véritable nature des mouvements apparemment capricieux des planètes. C'est pourquoi l'entreprise de mesurer l'Univers allait connaître un hiatus de plus de 1 800 ans avant que deux concepts révolutionnaires, l'héliocentrisme et le télescope, ne la relancent pour de bon.

Hipparque de Nicée

~190 - ~120

Considéré comme le plus grand astronome de toute l'Antiquité classique, Hipparque est né à Nicée en Bithynie (actuellement en Turquie). Il a fait des observations d'une bonne précision entre ~161 et ~127 depuis Rhodes et Alexandrie.

Il a mis en évidence un grand nombre de phénomènes insoupçonnés auparavant et a transformé l'astronomie grecque d'une science descriptive à une science prédictive. Il a estimé les distances Terre-Lune et Terre-Soleil, ainsi que les tailles réelles de ces astres. Il a dressé un catalogue de 800 étoiles, notant leur position avec précision et en évaluant leur grandeur apparente. Il fut le premier à reconnaître la précession des équinoxes, c'est-à-dire le déplacement lent du point vernal (équinoxe de printemps) sur le zodiaque.

Hipparque a développé l'idée d'Ératosthène d'utiliser des méridiens et des parallèles. Il a étendu cette idée à toute la sphère terrestre.

Cette extension l'a amené à poser les fondements de la trigonométrie sphérique, soit l'étude des triangles sur la surface d'une sphère, pour pouvoir déterminer la distance entre deux points qui ne sont pas sur le même méridien ni sur le même parallèle.

La spectroscopie permet d'aller plus loin et déterminer la distance des étoiles trop éloignées pour avoir une parallaxe mesurable.

Un peu plus loin !

Pierre Chastenay
Astronome
Planétarium de Montréal

La photométrie à la rescousse

Les méthodes photométriques d'estimation des distances se basent toutes sur le fait que l'intensité I d'une source lumineuse de luminosité constante diminue en fonction du carré de la distance r qui nous en sépare :

$$I \propto \frac{1}{r^2}.$$

Par exemple, à luminosité constante, une source lumineuse deux fois plus éloignée nous apparaîtra quatre fois moins brillante, neuf fois si elle est trois fois plus loin, etc. Si l'on connaît la luminosité intrinsèque L d'une étoile et son intensité apparente I, on peut déduire la distance D qui nous en sépare grâce à la relation :

$$I = C \times \frac{L}{D^2},$$

où C est une constante dont la valeur dépend des unités utilisées. La relation pour D devient alors :

$$D = \sqrt{\frac{CL}{I}}.$$

On remarque que cette relation fait intervenir trois variables dont seulement une, l'intensité I, est connue, puisque c'est précisément ce que les astronomes mesurent par photométrie. On sait d'autre part que la luminosité intrinsèque d'une étoile se retrouve à l'intérieur d'un très vaste intervalle, des naines rouges très peu lumineuses jusqu'aux supergéantes bleues des dizaines de milliers de fois plus brillantes que le Soleil. Alors, pour une intensité donnée, comment savoir si l'on a affaire à une étoile peu lumineuse, mais proche, ou plutôt à une étoile extrêmement lumineuse beaucoup plus éloignée ? Il est tout à fait possible que ces deux étoiles aient la même intensité lumineuse apparente sans qu'elles se trouvent pour autant à la même distance de la Terre. Comment contourner cet important problème ?

Spectroscopie

C'est ici que la spectroscopie entre en jeu. Quiconque a déjà contemplé un arc-en-ciel a remarqué la dispersion des couleurs, du rouge au bleu; depuis les travaux de Sir Isaac Newton (1643-1727) sur la lumière, nous savons que ces couleurs composent le spectre de la lumière solaire. En poussant plus loin l'analyse de la lumière des étoiles dispersée par un prisme, les astronomes y ont découvert des raies spectrales, qui apparaissent comme des bandes sombres superposées à l'arc-en-ciel des couleurs. La théorie atomique nous a appris que ces raies sont la signature spectrale des éléments chimiques qui composent les étoiles. L'étude approfondie des raies spectrales nous renseigne non seulement sur la composition chimique des étoiles, mais également sur certaines de leurs caractéristiques physiques, comme leur température, leur masse, leur taille, leur gravité de surface, etc. Tous ces renseignements nous permettent ensuite de classer les étoiles en familles qui partagent certaines caractéristiques physiques communes, dont la luminosité intrinsèque.

C'est ainsi qu'il est possible de comparer deux étoiles dont les caractéristiques spectrales nous apprennent qu'elles ont à peu près la même luminosité L. Il est alors simple d'établir un rapport de distance entre l'étoile plus proche et plus brillante et l'autre, plus éloignée et nécessairement moins brillante. Cela nous renseigne sur leurs distances relatives, mais ne nous dit cependant rien sur la distance réelle qui nous en sépare. Pour cela, il faut être en mesure de calibrer nos observations, par exemple en comparant ces deux étoiles avec une troisième de la même famille, mais située suffisamment proche de la Terre pour que sa distance soit connue par parallaxe. On utilise alors cette troisième étoile pour calculer L à partir de son intensité observée I, puis, connaissant L (la même pour les trois étoiles) et l'intensité des autres étoiles de la même famille, on peut calculer leur distance. Cette méthode fonctionne bien en principe, mais se heurte souvent à l'écueil de savoir si deux étoiles qui se ressemblent ont véritablement les mêmes caractéristiques et, surtout, la même luminosité…

Les céphéides

Il existe heureusement une famille d'étoiles qui a été une véritable pierre de Rosette pour les astronomes tentant de mesurer de grandes distances stellaires : les étoiles céphéides. Le prototype de cette catégorie d'étoiles est Delta Cephei, dans la constellation de Céphée. Il s'agit d'une étoile orangée dont la luminosité varie de manière régulière et périodique. Un groupe particulier d'étoiles céphéides a joué un rôle primordial dans l'histoire de la mesure des distances cosmiques : celles situées dans le Petit Nuage de Magellan, une galaxie irrégulière en orbite autour de notre Voie lactée et visible uniquement de l'hémisphère Sud de la Terre.

Petit Nuage de Magellan

Les céphéides du Petit Nuage de Magellan ont été longuement étudiées par l'astronome américaine Henrietta Leavitta[1] qui est arrivée à la conclusion remarquable que plus une céphéide nous apparaissait brillante, plus longue était sa période de variation (l'intervalle entre deux maxima d'intensité). Or, toutes les céphéides étudiées par Leavitt étaient situées à l'intérieur du Petit Nuage de Magellan; cela signifie qu'elles étaient pratiquement toutes situées à la même distance de nous. Cela permettait de supposer que, pour une étoile céphéide, sa période de variation P était directement proportionnelle à sa luminosité intrinsèque L :

$$P = k \times L,$$

où k est une constante. Pour les céphéides, donc, plus la période de variation d'intensité est longue, plus l'étoile est intrinsèquement brillante. Mesurer la période d'une céphéide permettait donc, en principe, de connaître sa luminosité et, par conséquent, sa distance.

Malheureusement, Henrietta Leavitt ne connaissait pas la distance qui nous sépare du Petit Nuage de Magellan, ce qui lui aurait permis de calibrer sa relation. On ne connaissait pas non plus à l'époque de céphéide suffisamment proche de la Terre pour déterminer sa distance par parallaxe. Mais un an à peine après la publication des travaux de Leavitt, en 1913, l'astronome danois Ejnar Hertzsprung (1873-1967) annonça être parvenu à mesurer la distance de quelques céphéides de la Voie lactée à l'aide d'une méthode statistique. La mesure des distances par la méthode des céphéides était donc calibrée. On tenait enfin l'étalon de mesure qui allait permettre la détermination des distances cosmiques à l'échelle de l'Univers entier ! De nos jours, on calibre la relation période-luminosité grâce à quelques céphéides situées à la limite de la portée du satellite Hipparcos.

1. *Voir note biographique rédigée par André Ross en page 29.*

La taille de la Voie lactée

Dès que l'on eut calibré les céphéides comme marqueurs de distance, les astronomes se mirent à la recherche de ces étoiles partout dans la Voie lactée et au-delà. L'astronome américain Harlow Shapley (1885-1972) utilisa des céphéides découvertes dans une centaine d'amas globulaires pour déterminer leur distribution dans l'espace. Les amas globulaires sont des regroupements sphériques de centaines de milliers d'étoiles liées par la gravité. Shapley eut la surprise de découvrir que les amas globulaires formaient une vaste sphère centrée sur un point situé à 25 000 années-lumière (a.-l.) de la Terre, en direction de la constellation du Sagittaire. Il en conclut que les amas globulaires étaient en orbite autour du centre massif de la Voie lactée, situé à 25 000 a.-l. de la Terre. Une telle distance décuplait la taille de la Voie lactée, dont on sait aujourd'hui qu'elle mesure plus de 100 000 a.-l. de diamètre.

Un autre avantage des céphéides est le fait que ces étoiles sont généralement très lumineuses, si bien qu'il est possible de les observer au-delà de la Voie lactée, au sein de galaxies voisines, comme les Nuages de Magellan. En 1925, l'astronome américain Edwin Hubble (1889-1953) parvint à mesurer la période d'étoiles céphéides situées au sein de la » nébuleuse » d'Andromède, dont on ne savait pas encore s'il s'agissait d'une île d'étoiles distincte de notre Voie lactée, ou d'un simple amas d'étoiles situé à l'intérieur des limites de notre Galaxie. Grâce aux céphéides, Hubble calcula que la grande galaxie était bel et bien située à l'extérieur de la Voie lactée, on sait aujourd'hui qu'elle est située à plus de 2,4 millions d'a.-l. de la Terre. Une telle distance repoussait encore plus loin les limites de l'Univers connu !

Amas globulaire dans Hercule

Étoiles géantes et supernovae

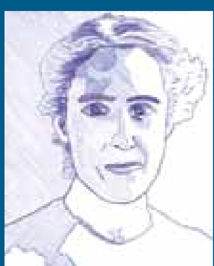
Même si les céphéides sont très lumineuses, il existe tout de même une limite au-delà de laquelle il devient pratiquement impossible de les distinguer des autres étoiles de leur galaxie hôtesse. Cette limite se situe à environ 100 millions d'a.-l. de la Voie lactée. Pour mesurer des distances au-delà de cette limite, les astronomes se tournent vers des objets encore plus brillants, comme les étoiles supergéantes bleues et les supernovae. Par exemple, en comparant les galaxies dont la distance est connue par la méthode des céphéides, les astronomes ont constaté que les étoiles supergéantes les plus brillantes de chaque galaxie avaient à peu près la même luminosité intrinsèque, des centaines de milliers de fois plus que le Soleil. Si on découvre de telles étoiles dans des galaxies trop éloignées pour y détecter des céphéides, on peut utiliser notre connaissance de leur luminosité intrinsèque moyenne pour déterminer la distance qui nous en sépare.

Il est possible de faire de même avec des objets encore plus lumineux, des milliards de fois plus que le Soleil : les supernovae. Une étoile massive arrivée à la fin de sa vie explose généralement de manière catastrophique. La majeure partie de sa masse sera soufflée dans l'espace, révélant son noyau incroyablement chaud et brillant. Pendant quelques jours, une supernova peut être plus brillante qu'une galaxie entière ! Il existe divers type de supernovae, dont certaines atteignent toujours la même luminosité maximale et qui peuvent donc être calibrées pour servir d'étalon de distance au-delà de la limite des céphéides et des supergéantes bleues. Ce sont de telles supernovae qui ont permis aux astronomes de déterminer les distances aux galaxies les plus lointaines, situées à plusieurs milliards d'a.-l. de nous !

Conclusion

L'entreprise de mesurer le monde s'est révélée longue et ardue, mais les résultats sont spectaculaires. Du cosmos des philosophes grecs, relativement restreint et centré sur la Terre, nous sommes passés aujourd'hui à un Univers démesurément vaste, où la Terre n'est plus qu'un minuscule grain de poussière en orbite autour d'une étoile ordinaire située à la périphérie d'une galaxie en tout point semblable à des milliards d'autres galaxies qui peuplent le firmament. Une telle expansion des limites du cosmos est à l'image du développement de nos outils de mesure, trigonométriques d'abord, puis incorporant les connaissances plus récentes en mathématiques, en physique et notre connaissance intime de la structure et du comportement de la matière.

La mesure du monde a également constitué une véritable leçon d'humilité pour l'humanité qui comprend mieux aujourd'hui sa place dans le cosmos. Nous n'occupons pas de position privilégiée et l'Univers pourrait sans doute très bien se passer de notre présence. Mais par la simple force de sa raison et par son intelligence, l'être humain a tout de même réussi à prendre la mesure de cet Univers immense. Voilà certainement une des manifestations de la véritable grandeur de l'humanité !

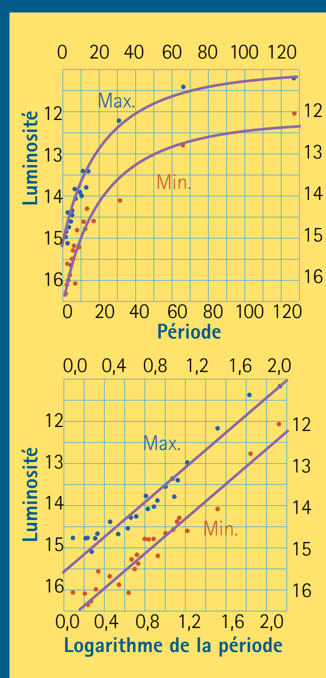


Henrietta Leavitt

L'astronome américaine Henrietta Swan Leavitt est née en 1868 à Lancaster (Massachusetts) et est décédée en 1921 à Cambridge (Massachusetts). Elle effectua des études au Oberlin College et à la Society for Collegiate Instruction of Women (Radcliffe College) où elle découvrit l'astronomie. Après avoir obtenu son diplôme, elle suivit d'autres cours dans cette discipline dans laquelle elle fit des découvertes importantes. À l'âge de 25 ans, elle devint sourde à la suite d'une maladie. Engagée comme volontaire à l'observatoire du collège Harvard de Cambridge par Edward Charles Pickering, elle devait analyser des milliers de plaques photographiques afin d'évaluer la magnitude des étoiles. Elle eut à analyser des plaques photographiques des Nuages de Magellan, reçues de la station australe d'Harvard, l'observatoire péruvien d'Arequipa. Elle y repéra plusieurs étoiles, de luminosité apparente variable, comme celle découverte en 1786 par l'astronome anglais John Goodricke dans la constellation de Céphée.

Voulant comprendre ce qui détermine le rythme de fluctuations de la luminosité de ces étoiles, elle porta son attention sur les deux seuls paramètres mesurables concernant n'importe quelle céphéide : la période de variation et la luminosité. Elle chercha à savoir s'il existait une relation entre la période et la luminosité, c'est-à-dire si les étoiles les plus brillantes avaient une période de variation plus longue que les étoiles moins brillantes, et inversement.

Elle découvrit qu'il existe effectivement une relation mathématique entre la luminosité intrinsèque de ces étoiles et leur période de pulsation et elle comprit que cette caractéristique des céphéides permet d'en déduire la distance relative, mais il fallait une base de comparaison. Elle ne connaissait pas la distance entre la Terre et le Nuage de Magellan, mais elle soupçonnait que celui-ci était très éloigné et que les céphéides qu'il contenait étaient relativement proches les unes des autres en comparaison de leur distance à la Terre. En d'autres termes, les vingt-cinq céphéides repérées dans le Nuage se trouvaient toutes plus ou moins à la même distance de la Terre.



Les données recueillies par Henrietta Leavitt pour établir la relation période-luminosité sont représentées dans les graphiques ci-contre dans lesquels on a reporté la luminosité maximale et minimale de chacune des céphéides repérées. Dans le premier graphique, l'axe des abscisses est gradué selon une échelle linéaire et représente la période mesurée en jours. Dans l'autre graphique, l'axe des abscisses est gradué selon une échelle logarithmique et représente le logarithme de la période. Les deux droites de ce graphique révèlent un lien affine entre le logarithme de la période et la luminosité de la céphéide. Cette relation période-luminosité est à la base d'une méthode d'évaluation des distances des amas stellaires et des galaxies dans l'Univers qui sera utilisée notamment par Edwin Hubble.

L'astéroïde (5383) Leavitt a été nommé en l'honneur de cette astronome de talent.